Метод Гаусса (последовательного исключения неизвестных).

**Постарайтесь разобрать, законспектировать, отметить в тетради, то, что вам не понятно!!
В четверг 11.11.21 пара будет проходить в Zoom, будем разбирать примеры!
Дайте обратную свзязь, кто просмотрел информацию и законспектировал**

.

**Метод Гаусса – это просто!**

Известный немецкий математик Иоганн Карл Фридрих Гаусс еще при жизни получил признание величайшего математика всех времен, гения и даже прозвище «короля математики». **А всё гениальное, как известно – просто!**Кстати, на деньги попадают не только лохи, но еще и гении – портрет Гаусса красовался на купюре в 10 дойчмарок (до введения евро), и до сих пор Гаусс загадочно улыбается немцам с обычных почтовых марок.

Метод Гаусса прост тем, что для его освоения ДОСТАТОЧНО ЗНАНИЙ ПЯТИКЛАССНИКА. **Необходимо уметь складывать и умножать!**

**Систематизируем знания о системах линейных уравнений.**

Система линейных уравнений может:

1) Иметь единственное решение.

2) Иметь бесконечно много решений.

3) Не иметь решений (быть *несовместной*).

Метод  Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения **любой** системы линейных уравнений. Как мы помним, [правило Крамера и матричный метод](https://infourok.ru/go.html?href=http%3A%2F%2Fwww.mathprofi.ru%2Fpravilo_kramera_matrichnyi_metod.html) непригодны в тех случаях, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна. А метод последовательного исключения неизвестных **в любом случае**приведет нас к ответу! На данном уроке мы рассмотрим метод Гаусса для случая №1 (единственное решение системы), под ситуации пунктов №№2-3 отведена статья [Несовместные системы и системы с общим решением](https://infourok.ru/go.html?href=http%3A%2F%2Fwww.mathprofi.ru%2Fslu_nesovmestnye_sistemy_i_sistemy_s_obshim_resheniem.html). Замечу, что сам алгоритм метода во всех трёх случаях работает одинаково.

Вернемся к простейшей системе с урока [Как решить систему линейных уравнений?](https://infourok.ru/go.html?href=http%3A%2F%2Fwww.mathprofi.ru%2Fkak_reshit_sistemu_uravnenii.html)
 и решим ее методом Гаусса.

На первом этапе нужно записать *расширенную матрицу системы*:
. По какому принципу записаны коэффициенты, думаю, всем видно. Вертикальная черта внутри матрицы не несёт никакого математического смысла – это просто отчеркивание для удобства оформления.

***Справка***:*рекомендую запомнить****термины****линейной алгебры.****Матрица системы****– это матрица, составленная только из коэффициентов при неизвестных, в данном примере матрица системы: .****Расширенная матрица системы****– это та же матрица системы плюс столбец свободных членов, в данном случае: . Любую из матриц можно для краткости называть просто матрицей.*

После того, как расширенная матрица системы записана, с ней необходимо выполнить некоторые действия, которые также называются *элементарными преобразованиями*.

Существуют следующие элементарные преобразования:

1) **Строки** матрицы **можно** **переставлять** местами. Например, в рассматриваемой матрице можно безболезненно переставить первую и вторую строки: 

2) Если в матрице есть (или появились) пропорциональные (как частный случай – одинаковые) строки, то следует **удалить** из матрицы все эти строки кроме одной. Рассмотрим, например матрицу . В данной матрице последние три строки пропорциональны, поэтому достаточно оставить только одну из них: .

3) Если в матрице в ходе преобразований появилась нулевая строка, то ее также следует**удалить**. Рисовать не буду, понятно, нулевая строка – это строка, в которой *одни нули*.

4) Строку матрицы можно **умножить (разделить)** на любое число, отличное от нуля. Рассмотрим, например, матрицу . Здесь целесообразно первую строку разделить на –3, а вторую строку – умножить на 2: . Данное действие очень полезно, поскольку упрощает дальнейшие преобразования матрицы.

5) Это преобразование вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле ничего сложного тоже нет. К строке матрицы можно **прибавить другую строку, умноженную на число**, отличное от нуля. Рассмотрим нашу матрицу из практического примера: . Сначала я распишу преобразование очень подробно. Умножаем первую строку на –2: , и **ко второй строке прибавляем первую строку умноженную на –2**: . Теперь первую строку можно разделить «обратно» на –2: . Как видите, строка, которую ПРИБАВЛЯ**ЛИ** – не изменилась. **Всегда** меняется строка, К КОТОРОЙ ПРИБАВЛЯ**ЮТ**.

На практике так подробно, конечно, не расписывают, а пишут короче:

Еще раз: ко второй строке **прибавили первую строку, умноженную на –2**. Умножают строку обычно устно или на черновике, при этом мысленный ход расчётов примерно такой:

«Переписываю матрицу и переписываю первую строку: »

«Сначала первый столбец. Внизу мне нужно получить ноль. Поэтому единицу вверху умножаю на –2: , и ко второй строке прибавляю первую: 2 + (–2) = 0. Записываю результат во вторую строку:  »

«Теперь второй столбец. Вверху –1 умножаю на –2: . Ко второй строке прибавляю первую: 1 + 2 = 3. Записываю результат во вторую строку:  »

«И третий столбец. Вверху –5 умножаю на –2: . Ко второй строке прибавляю первую: –7 + 10 = 3. Записываю результат во вторую строку:  »

Пожалуйста, тщательно осмыслите этот пример и разберитесь в последовательном алгоритме вычислений, если вы это поняли, то метод Гаусса практически «в кармане».

**Элементарные преобразования не меняют решение системы уравнений**

**! ВНИМАНИЕ**: рассмотренные манипуляции **нельзя использовать**, если Вам предложено задание, где матрицы даны «сами по себе». Например, при «классических» [**действиях с матрицами**](https://infourok.ru/go.html?href=http%3A%2F%2Fwww.mathprofi.ru%2Fdeistviya_s_matricami.html) что-то переставлять внутри матриц ни в коем случае нельзя!

Вернемся к нашей системе . Она практически разобрана по косточкам.

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к *ступенчатому виду*:



(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. И снова: почему первую строку умножаем именно на –2? Для того чтобы внизу получить ноль, а значит, избавиться от одной переменной во второй строке.

(2) Делим вторую строку на 3.

**Цель элементарных преобразований***–* привести матрицу к ступенчатому виду: . В оформлении задания прямо так и отчеркивают простым карандашом «лестницу», а также обводят кружочками числа, которые располагаются на «ступеньках». Сам термин «ступенчатый вид» не вполне теоретический, в научной и учебной литературе он часто называется *трапециевидный вид* или *треугольный вид*.

 В результате элементарных преобразований получена *эквивалентная* исходной система уравнений:


Теперь систему нужно «раскрутить» в обратном направлении – снизу вверх, этот процесс называется *обратным ходом метода Гаусса*.

В нижнем уравнении у нас уже готовый результат: .

Рассмотрим первое уравнение системы  и подставим в него уже известное значение «игрек»:



Ответ: 

Рассмотрим наиболее распространенную ситуацию, когда методом Гаусса требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 1

Решить методом Гаусса систему уравнений:


Запишем расширенную матрицу системы:


Сейчас я сразу нарисую результат, к которому мы придём в ходе решения:

И повторюсь, наша цель – с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду. С чего начать действия?

Сначала смотрим на левое верхнее число:

Почти всегда здесь должна находиться **единица**. Вообще говоря, устроит и –1 (а иногда и другие числа), но как-то так традиционно сложилось, что туда обычно помещают единицу. Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть! Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:


**Теперь первая строка у нас останется неизменной до конца решения**.

Единица в левом верхнем углу организована. Теперь нужно получить нули вот на этих местах:


Нули получаем как раз с помощью «трудного» преобразования. Сначала разбираемся со второй строкой (2, –1, 3, 13). Что нужно сделать, чтобы на первой позиции получить ноль? Нужно **ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –2**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –2: (–2, –4, 2, –18). И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на –2**:


Результат записываем во вторую строку:


Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, –5, –1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно **к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3**. Мысленно или на черновике умножаем первую строку на –3: (–3, –6, 3, –27). И **к третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –3**:


Результат записываем в третью строку:


На практике эти действия обычно выполняются устно и записываются в один шаг:


**Не нужно считать всё сразу и одновременно**. Порядок вычислений и «вписывания» результатов **последователен** и обычно такой: сначала переписываем первую строку, и пыхтим себе потихонечку – ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО и**ВНИМАТЕЛЬНО**:

А мысленный ход самих расчётов я уже рассмотрел выше.

Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:


В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на –5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на –2, ведь чем меньше числа, тем проще решение:


На заключительном этапе элементарных преобразований нужно получить еще один ноль здесь:


Для этого **к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на –2**:

Попробуйте разобрать это действие самостоятельно – мысленно умножьте вторую строку на –2 и проведите сложение.

Последнее выполненное действие – причёска результата, делим третью строку на 3.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:

Круто.

Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.

В третьем уравнении у нас уже готовый результат: 

Смотрим на второе уравнение: . Значение «зет» уже известно, таким образом:



И, наконец, первое уравнение: . «Игрек» и «зет» известны, дело за малым:




**Ответ**: 

Как уже неоднократно отмечалось, для любой системы уравнений можно и нужно сделать проверку найденного решения, благо, это несложно и быстро.

Пример 2

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса


Это пример для самостоятельного решения, образец чистового оформления и ответ в конце урока.

Следует отметить, что ваш **ход решения** может не совпасть с моим ходом решения, **и это – особенность метода Гаусса**. Но вот ответы обязательно должны получиться одинаковыми!

Пример 3

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса


Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:


Смотрим на левую верхнюю «ступеньку». Там у нас должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно организовать с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Я поступил так:
(1) **К первой строке прибавляем вторую строку, умноженную на –1**. То есть, мысленно умножили вторую строку на –1 и выполнили сложение первой и второй строки, при этом вторая строка у нас не изменилась.



Теперь слева вверху «минус один», что нас вполне устроит. Кто хочет получить +1, может выполнить дополнительное телодвижение: умножить первую строку на –1 (сменить у неё знак).

Дальше алгоритм работает уже по накатанной колее:


(2) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на 5. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на 3.

(3) Первую строку умножили на –1, в принципе, это для красоты. У третьей строки также сменили знак и переставили её на второе место, таким образом, на второй «ступеньке у нас появилась нужная единица.

(4) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 2.

(5) Третью строку разделили на 3.

Скверным признаком, который свидетельствует об ошибке в вычислениях (реже – об опечатке), является «плохая» нижняя строка. То есть, если бы у нас внизу получилось что-нибудь вроде , и, соответственно, , то с большой долей вероятности можно утверждать, что допущена ошибка в ходе элементарных преобразований.

Заряжаем обратный ход, в оформлении примеров часто не переписывают саму систему, а уравнения «берут прямо из приведенной матрицы». Обратный ход, напоминаю, работает, снизу вверх. Да тут подарок получился:




**Ответ**: .

Пример 4

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса


Это пример для самостоятельного решения, он несколько сложнее. Ничего страшного, если кто-нибудь запутается. Полное решение и образец оформления в конце урока. Ваше решение может отличаться от моего решения.

**Особенности алгоритма Гаусса.**

 ***Первая особенность*** состоит в том, что иногда в уравнениях системы отсутствуют некоторые переменные, например:

В расширенной матрице системы на месте отсутствующих переменных ставим нули:


Кстати, это довольно легкий пример, поскольку в первом столбце уже есть один ноль, и предстоит выполнить меньше элементарных преобразований.

***Вторая особенность***

Во всех рассмотренных примерах на «ступеньки» мы помещали либо –1, либо +1. Могут ли там быть другие числа? В ряде случаев могут. Рассмотрим систему: .

Здесь на левой верхней «ступеньке» у нас двойка. Но замечаем тот факт, что все числа в первом столбце делятся на 2 без остатка – и другая двойка и шестерка. И двойка слева вверху нас устроит! На первом шаге нужно выполнить следующие преобразования: ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на –1; к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на –3. Таким образом, мы получим нужные нули в первом столбце.

Или еще такой условный пример: . Здесь тройка на второй «ступеньке» тоже нас устраивает, поскольку 12 (место, где нам нужно получить ноль) делится на 3 без остатка. Необходимо провести следующее преобразование: к третьей строке прибавить вторую строку, умноженную на –4, в результате чего и будет получен нужный нам ноль.

Метод Гаусса универсален, но есть одно своеобразие. Уверенно научиться решать системы другими методами (методом Крамера, матричным методом) можно буквально с первого раза – там очень жесткий алгоритм. Но вот чтобы уверенно себя чувствовать в методе Гаусса, следует «набить руку», и прорешать хотя бы 5-10 систем. Поэтому поначалу возможны путаница, ошибки в вычислениях, и в этом нет ничего необычного или трагического.

Дождливая осенняя погода за окном.... Поэтому для всех желающих более сложный пример для самостоятельного решения:

**Сделать Методом Гаусса, проверить методом Крамера
X,Y,Z в обоих методах должны быть равны**